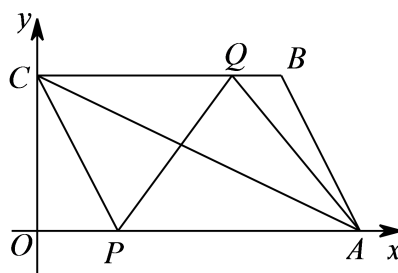


## 第2讲 四边形中的动点问题

### 一、 四边形动点与存在性问题

#### 例题1

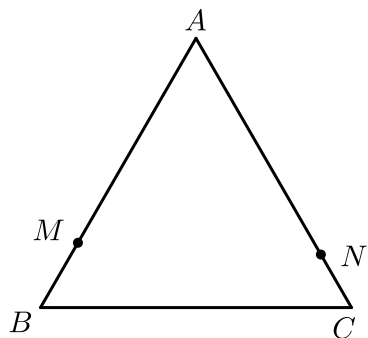
1. 如图，点 $A$ 的坐标为 $(8, 0)$ ，点 $B$ 的坐标为 $(6, 4)$ ，点 $C$ 的坐标为 $(0, 4)$ ，点 $P$ 从原点 $O$ 出发，以每秒3的单位长度的速度沿 $x$ 轴向右运动，点 $Q$ 从点 $B$ 出发，以每秒1的单位长度的速度沿线段 $BC$ 向左运动， $P, Q$ 两点同时出发，当点 $Q$ 运动到点 $C$ 时， $P, Q$ 两点停止运动，设运动时间为 $t$ (秒)。



- ( 1 ) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$  时，四边形 $OPQC$ 为矩形。
- ( 2 ) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$  时，线段 $PQ$ 平分四边形 $OABC$ 的面积。
- ( 3 ) 在整个运动过程中，当以 $A, C, P, Q$ 为顶点的四边形为平行四边形时，求该平行四边形的面积。

练习1

2. 如图，等边 $\triangle ABC$ 的边长为8，动点 $M$ 从点 $B$ 出发，沿 $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ 的方向以每秒3个单位长度的速度运动，动点 $N$ 从点 $C$ 出发，沿 $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的方向以每秒2个单位长度的速度运动。

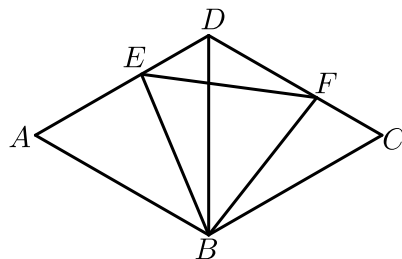


- (1) 若动点 $M$ 、 $N$ 同时出发，经过几秒第一次相遇？
- (2) 若动点 $M$ 、 $N$ 同时出发，且其中一点到达终点时，另一点即停止运动。在 $\triangle ABC$ 的边上是否存在一点 $D$ ，使得以点 $A$ 、 $M$ 、 $N$ 、 $D$ 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求此时运动的时间 $t$ 及点 $D$ 的具体位置；若不存在，请说明理由。

## 二、 四边形动点之最值问题

### 例题2

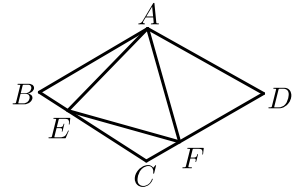
3. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为2， $BD = 2$ ， $E$ 、 $F$ 分别是边 $AD$ 、 $CD$ 上的两个动点，且满足 $AE + CF = 2$  .



- ( 1 ) 求证： $\triangle BDE \cong \triangle BCF$  .
- ( 2 ) 判断 $\triangle BEF$ 的形状，并说明理由 .
- ( 3 ) 试探究 $\triangle DEF$ 的周长是否存在最小值，如果不存在，请说明理由；如果存在，请计算出 $\triangle DEF$ 周长的最小值 .

## 练习2

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $\triangle AEF$ 为正三角形，点 $E$ 、 $F$ 分别在菱形的边 $BC$ 、 $CD$ 上滑动，且 $EF$ 不与 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 重合。



- (1) 证明：不论 $E$ 、 $F$ 在 $BC$ 、 $CD$ 上如何滑动，总有 $BE = CF$ 。
- (2) 当点 $E$ 、 $F$ 在 $BC$ 、 $CD$ 上滑动时，分别探讨四边形 $AECF$ 和 $\triangle CEF$ 的面积是否发生变化？  
如果不变，求出这个定值；如果变化，求出最大（或最小）值。

### 三、 四边形动点中之线段问题

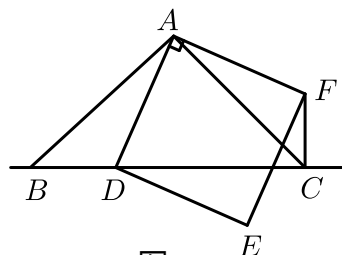
#### 例题3

5. 某数学兴趣小组在数学课外活动中，研究三角形和正方形的性质时，做了如下探究：

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $D$ 为直线 $BC$ 上一动点（点 $D$ 不与点 $B$ ， $C$ 重合），以 $AD$ 为边在 $AD$ 右侧作正方形 $ADEF$ ，连接 $CF$ 。

（1）观察猜想。

如图1，当点 $D$ 在线段 $BC$ 上时。

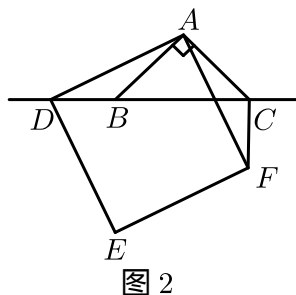


①  $BC$ 与 $CF$ 的位置关系为：\_\_\_\_\_。

②  $BC$ ， $CD$ ， $CF$ 之间的数量关系为：\_\_\_\_\_。（将结论直接写在横线上）

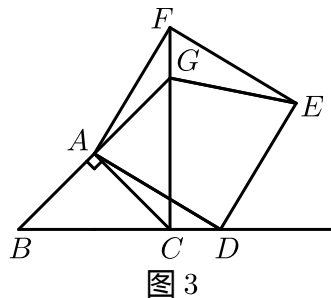
（2）数学思考。

如图2，当点 $D$ 在线段 $CB$ 的延长线上时，结论①，②是否仍然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请你写出正确结论再给予证明。



（3）拓展延伸。

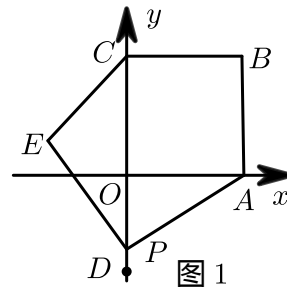
如图3，当点 $D$ 在线段 $BC$ 的延长线上时，延长 $BA$ 交 $CF$ 于点 $G$ ，连接 $GE$ ，若已知 $AB = 2\sqrt{2}$ ， $CD = \frac{1}{4}BC$ ，请求出 $GE$ 的长。



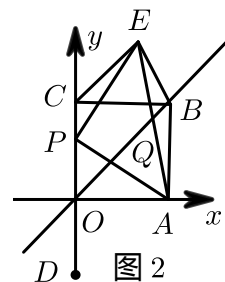
### 练习3

6. 在平面直角坐标系中，边长为4的正方形 $OABC$ 的边 $OA$ 落在 $x$ 轴的正半轴上，边 $OC$ 落在 $y$ 轴的正半轴上，点 $C$ 关于 $x$ 轴的对称点为点 $D$ ，点 $P$ 从点 $D$ 出发，以每秒1个单位的速度，沿着射线 $DC$ 的方向运动，运动时间为 $t$  ( $t > 0$ ，且 $t \neq 4$ ) 连接 $PA$ ， $PA$ 绕着点 $P$ 逆时针方向旋转 $90^\circ$ 得到 $PE$ ，连接 $CE$ 。

(1) 如图1，当 $0 < t < 4$ 时，求 $\angle DCE$ 的度数。



(2) 如图2，连接 $AE$ ，交 $OB$ 于 $Q$ ，若 $4 < t < 8$ ，求证： $\sqrt{2}OA = CE + 2BQ$ 。

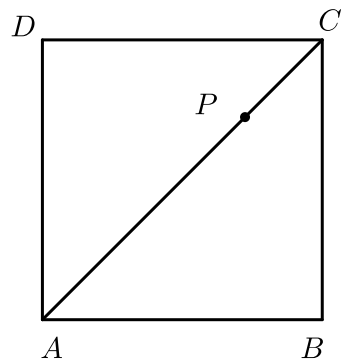


(3) 连接 $AE$ ，交直线 $OB$ 于 $Q$ ，若 $BQ = 1$ ，请直接写出 $t$ 的值。

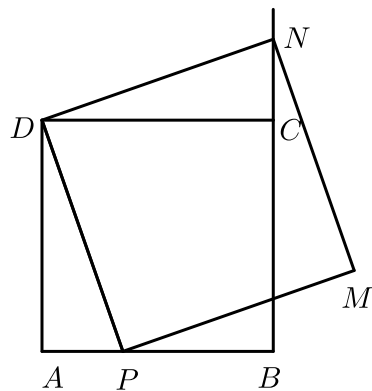
## 四、 四边形动点之路径问题

### 例题3

7. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 。



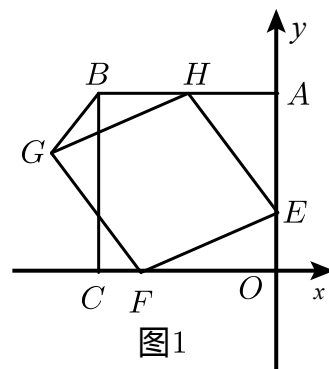
- ( 1 ) 若点 $P$ 是对角线 $AC$ 上的一个动点，请证明 $PD = PB$  .  
( 2 ) 若点 $P$ 是边 $AB$ 上的一个动点，以 $DP$ 为边在 $AB$ 同侧作正方形 $DPMN$  .



- ① 试说明 $N$ 点一定在 $BC$ 的延长线上 .  
② 若正方形 $ABCD$ 的边长为3，当点 $P$ 在 $AB$ 边上由点 $A$ 运动至点 $B$ 时，点 $M$ 随之运动，求点 $M$ 的运动路径长 .

# 练习4

8. 如图1, 在平面直角坐标系中, 正方形 $ABCO$ 的顶点 $C$ 、 $A$ 分别在 $x$ 、 $y$ 轴上,  $A(0, 6)$ 、 $E(0, 2)$ , 点 $H$ 、 $F$ 分别在边 $AB$ 、 $OC$ 上, 以 $H$ 、 $E$ 、 $F$ 为顶点作菱形 $EFGH$ .



- (1) 当 $H(-2, 6)$ 时, 求证: 四边形 $EFGH$ 为正方形.
- (2) 若 $F(-5, 0)$ , 求点 $G$ 的坐标.
- (3) 如图2, 点 $Q$ 为对角线 $BO$ 上一动点,  $D$ 为边 $OA$ 上一点,  $DQ \perp CQ$ , 点 $Q$ 从点 $B$ 出发, 沿 $BO$ 方向移动. 若移动的路径长为3, 直接写出 $CD$ 的中点 $M$ 移动的路径长为 \_\_\_\_\_.

